



## Серия №1. Векторы

3 июля

**Определение.** Вектор – класс всех направленных отрезков, совпадающих по длине и направлению. Векторы сонаправлены, если направления совпадают, и коллинеарны, если направления параллельны. Нулевой вектор  $\vec{0}$  – длина равна 0, коллинеарен любому вектору.

Векторы можно складывать, вычитать, умножать на число, поворачивать.

- Сложить несколько векторов – отложить каждый следующий от конца предыдущего.
  - Правило параллелограмма:**  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (переместительный закон сложения).
  - Если сумма неколлинеарных векторов равна  $\vec{0}$ , то из них можно выложить выпуклый многоугольник.
  - Если повернуть все векторы на один и тот же угол, то их сумма повернётся на тот же угол.
- Пусть точка  $M$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Докажите, что для любой точки  $O$  на плоскости верно равенство  $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$ .

### Задачи

- Пусть  $ABCD$  и  $AB_1C_1D_1$  – два параллелограмма с общей вершиной. Докажите, что  $\vec{CC_1} = \vec{BB_1} + \vec{DD_1}$ .
- Дан четырехугольник  $ABCD$ . Точки  $M$  и  $N$  – середины сторон  $BC$  и  $AD$  соответственно. Докажите, что  $\vec{MN} = \frac{\vec{BA} + \vec{CD}}{2} = \frac{\vec{CA} + \vec{BD}}{2}$ .
- На плоскости даны два неколлинеарных вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Докажите, что любой вектор в этой плоскости можно единственным образом представить в виде  $x\vec{a} + y\vec{b}$ .
  - Даны три неколлинеарные точки  $A, B, C$ . Пусть  $\vec{AT} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ . Докажите, что  $T$  лежит на прямой  $BC$  тогда и только тогда, когда  $x + y = 1$ .
- На плоскости нарисованы два квадрата –  $ABCD$  и  $KLMN$  (их вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что середины отрезков  $AK, BL, CM, DN$  также являются вершинами квадрата.
- На сторонах треугольника  $ABC$  вне его построены правильные треугольники  $ABC_1, BSA_1$  и  $CAB_1$ . Докажите, что  $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$ .
- Из медиан треугольника  $ABC$  составлен треугольник  $A_1B_1C_1$ , а из медиан треугольника  $A_1B_1C_1$  составлен треугольник  $A_2B_2C_2$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_2B_2C_2$  подобны, причем коэффициент подобия равен  $3/4$ .
- На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $C_1$  и  $C_2$ . Аналогично на стороне  $BC$  выбраны точки  $A_1$  и  $A_2$ , а на стороне  $AC$  – точки  $B_1$  и  $B_2$ . Оказалось, что отрезки  $A_1B_2, B_1C_2$  и  $C_1A_2$  имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен  $60^\circ$ . Докажите, что  $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{B_1B_2}{AC} = \frac{C_1C_2}{AB}$ .

10.  $D$  и  $E$  – точки на сторонах  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$  соответственно. Кроме того,  $DE$  не параллельно  $CB$ . Пусть  $F$  и  $G$  – точки на  $BC$  и  $ED$  соответственно такие, что  $\frac{BF}{FC} = \frac{EG}{GD} = \frac{BE}{CD}$ . Докажите, что  $GF$  параллельно биссектрисе угла  $\angle BAC$ .
11. Четырёхугольник  $ABCD$  вписанный. Пусть  $H_a$  – ортоцентр треугольника  $BCD$ ,  $M_a$  – середина отрезка  $AH_a$ ; точки  $M_b$ ,  $M_c$  и  $M_d$  определяются аналогично. Докажите, что точки  $M_a$ ,  $M_b$ ,  $M_c$  и  $M_d$  совпадают.
12. Пусть точка  $I$  – центр вписанной окружности треугольника  $A_1A_2A_3$ , точки  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  – центры внеписанных окружностей, противолежащих вершинам  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  соответственно,  $G$  – точка пересечения медиан треугольника  $A_1A_2A_3$ , точка  $H_1$  – ортоцентр треугольника  $I_1A_2A_3$ . Аналогично определяются точки  $H_2$  и  $H_3$ . Докажите, что прямые  $A_1H_1$ ,  $A_2H_2$ ,  $A_3H_3$  пересекаются в одной точке, причём эта точка лежит на прямой  $IG$ .